

Die Umkehrerscheinung der Spektrallinien bei den hohen Natriumkonzentrationen deuten auf das Vorhandensein einer kühleren, absorbierenden Na-Dampfschicht außerhalb des leuchtenden Teils der Flamme hin. Es ist möglich, diese Absorptionslinien in derselben Weise zu behandeln wie die Emissionslinien. Eine Berechnung von $k(\sigma)l$ der

Absorptionslinie der 1-mol. Lösung gibt eine etwas größere Linienbreite als die der Emissionslinie. Dieses Resultat ist zu erwarten, da die dominierende Stoßbreite mit abnehmender Temperatur wie $1/\sqrt{T}$ zunimmt (während die kleinere Doppler-Breite proportional \sqrt{T} ist). Die absolute Größe von $k(\sigma)l$ ist nur etwa 1% des Wertes für die Emissionslinie.

Zur Theorie der Leitfähigkeit in isotropen Halbleitern

Von OTFRIED MADELUNG

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckert-Werke AG, Erlangen

(Z. Naturforsch. 9a, 667—674 [1954]; eingegangen am 23. Juni 1954)

Die klassische Theorie der Leitfähigkeit in isotropen Halbleitern wird entwickelt und die Gleichungen für die elektrische und die thermische Stromdichte angegeben. Aus diesen Gleichungen werden die Koeffizienten aller galvanomagnetischen, thermoelektrischen und thermomagnetischen Effekte abgeleitet.

Für den Fall kleiner Magnetfelder wird die Theorie soweit durchgeführt, daß einer Übersichtstabelle die gesuchten Koeffizienten explizit für entartete und nichtentartete Halbleiter bei vorgegebenem Streumechanismus direkt entnommen werden können.

Die klassische Theorie der Leitfähigkeit wurde für Metalle schon 1906 von Gans weitgehend entwickelt¹ und vor allem durch Sommerfeld² in ihre endgültige Form gebracht. Auch ihre Übertragung auf Halbleiter wurde schon frühzeitig in Angriff genommen^{3,4}.

In der Folgezeit sind eine große Anzahl von Arbeiten erschienen, die sich mit der Erweiterung dieser Theorie und ihrer Anwendung auf spezielle Halbleiterprobleme beschäftigen. Besonders zu erwähnen sind hier die Arbeiten von K. Lark-Horowitz und V. A. Johnson, die vor allem die galvanomagnetischen Effekte in Halbleitern und den Einfluß der Streuung an ionisierten Störstellen eingehend untersuchten.

Trotzdem ist es häufig nicht einfach, vorliegende experimentelle Ergebnisse mit der Theorie zu vergleichen, da bei Halbleitern eine große Zahl von Parametern in die Gleichungen eingehen und diese dadurch recht unübersichtlich werden. Vor allem in neuerer Zeit hat es sich bei der Untersuchung der halbleitenden Elemente der IV. Gruppe des perio-

dischen Systems und noch mehr bei den halbleitenden Verbindungen der III. und V. Gruppe als notwendig erwiesen, die Ergebnisse der Leitfähigkeitstheorie, die meist nur für die Grenzfälle der Störleitung oder Eigenleitung und für rein thermische Streuung vorlagen, durch Einbeziehung einer zusätzlichen Streuung an ionisierten Störstellen, durch Berücksichtigung der Fermi-Statistik (Entartung) und durch Berücksichtigung der gleichzeitigen Anwesenheit von Elektronen und Löchern (gemischte Halbleiter) zu erweitern.

Die vorliegende Arbeit setzt es sich zum Ziel, den Formalismus der klassischen Theorie der Leitfähigkeit so darzustellen und weiterzuentwickeln, daß für jeden vorliegenden Fall die Gleichungen für die elektrische und thermische Stromdichte und die Koeffizienten der zahlreichen galvanomagnetischen, thermoelektrischen und thermomagnetischen Effekte direkt übernommen werden können. Die Beschränkung auf die *klassische* Theorie der Leitfähigkeit bedeutet hier, daß alle Effekte, die mit Dichteänderungen im Halbleiterinneren verknüpft sind,

¹ R. Gans, Ann. Phys., Lpz. **20**, 293 [1906].

² A. Sommerfeld, Z. Phys. **47**, 1, 43 [1928]; A. Sommerfeld u. N. H. Frank, Rev. Mod. Phys. **3**, 1 [1931].

³ A. H. Wilson, Proc. Roy. Soc. **133**, 458, **134**, 277

[1931]; M. Bronstein, Phys. Z. Sowjetunion **2**, 28 [1921].

⁴ Vgl. z. B.: H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle, Springer 1936; F. Seitz, Modern Theory of Solids, McGraw-Hill 1950, u. a.



nicht erfaßt werden; d. h. die Lebensdauer überschüssiger Elektron-Loch-Paare ist als verschwindend klein angenommen.

1. Die Grundgleichungen für die elektrische und die thermische Stromdichte

Auf die Grundlagen der Leitfähigkeitstheorie in isotropen Medien braucht hier nicht genauer eingegangen zu werden. Hierüber sind genug Darstellungen vorhanden⁴. Man geht allgemein von der Boltzmannschen *Stationaritätsbedingung* aus, welche fordert, daß im stationären Zustand die Änderung der Verteilungsfunktion der Elektronen bzw. Löcher durch das angelegte Feld gleich der Änderung durch die Zusammenstöße der Ladungsträger mit den Gitterbausteinen ist. Nimmt man an, daß die Gitterstöße elastisch sind, und setzt man für die gestörte Verteilungsfunktion der Elektronen bzw. Löcher

$$f = f_0 + \Phi \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \quad (1)$$

(f_0 =Verteilungsfunktion im feldfreien Halbleiter, Φ =kleine Störungsfunktion), so erhält man im allgemeinsten Fall (beliebige Richtung des elektrischen Feldes, des Magnetfeldes und des Temperaturgradienten) für Φ die Gleichung:

$$\Phi = \frac{1}{1+s^2} \{ (v \mathfrak{F}) + (v [\mathfrak{s} \mathfrak{F}]) + (v \mathfrak{s}) (\mathfrak{s} \mathfrak{F}) \} \quad (2)$$

mit $\mathfrak{s} = \frac{el}{mv} \mathfrak{H}$,

$$\mathfrak{F} = \frac{l}{v} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{T} + T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\zeta_{n,p}}{T} \right) \right) \text{grad } T + e \mathfrak{E} \right\}, \quad (2a)$$

wo l die freie Weglänge, v die Geschwindigkeit, ε die kinetische Energie und m die scheinbare Masse der Elektronen bzw. Löcher bedeuten. $\zeta_{n,p}$ ist die Fermi-Kante der Elektronen bzw. Löcher ($\zeta_n = \zeta - E_L$, $\zeta_p = E_G - \zeta = -\zeta_n - \Delta E$).

Geht man hiermit in die Gleichungen für die elektrische bzw. thermische Stromdichte

$$\begin{aligned} i &= -e \int v f(r, v) dv, \\ c &= \int v \frac{mv^2}{2} f(r, v) dv - z_L \text{grad } T \end{aligned} \quad (3)$$

(z_L =Wärmeleitfähigkeit des Gitters) ein, so erhält man nach teilweiser Ausführung der Integration und einigen Umformungen für die elektrische und thermische Gesamtstromdichte der Elektronen und Löcher die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} i &= M_{13+} \mathfrak{E} + M_{22-} [\mathfrak{H} \mathfrak{E}] + M_{31+} \mathfrak{H} (\mathfrak{H} \mathfrak{E}) \\ &\quad + S_{13-} \text{grad } T + S_{22+} [\mathfrak{H} \text{grad } T] \\ &\quad + S_{31-} \mathfrak{H} (\mathfrak{H} \text{grad } T), \\ c &= -M_{15-} \mathfrak{E} - M_{24+} [\mathfrak{H} \mathfrak{E}] - M_{33-} \mathfrak{H} (\mathfrak{H} \mathfrak{E}) \\ &\quad - (S_{15+} + z_L) \text{grad } T - S_{24-} [\mathfrak{H} \text{grad } T] \\ &\quad - S_{33+} \mathfrak{H} (\mathfrak{H} \text{grad } T) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

mit

$$\begin{aligned} M_{ik} &= -e n_0 \mu_0^i \left\{ \left(\frac{3V\pi}{4} \right)^{i-1} \left(\frac{kT}{e} \right)^{\frac{k+i}{2}-2} \right\} \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{m} \right)^3 \int_0^\infty g^i x^{\frac{k-1}{2}} \frac{\partial f_0}{\partial x} \frac{1}{1+s^2} dx, \\ S_{ik} &= \frac{T}{e} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\zeta_{n,p}}{T} \right) M_{ik} + \frac{1}{T} M_{i,k+2}, \\ M_{ik\pm} &= M_{ikn} \pm M_{ikp}, \quad S_{ik\pm} = S_{ikn} \pm S_{ikp}, \\ f_0 &= 2 \left(\frac{m}{h} \right)^3 \left(1 + e^{\frac{\varepsilon - \zeta_{n,p}}{kT}} \right)^{-1}, \\ n_0 &= 2 \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad l = l_0 g \left(\frac{\varepsilon}{kT} \right), \\ \mu_0 &= \frac{4el_0}{3\sqrt{2\pi mkT}}, \quad x = \frac{\varepsilon}{kT} = \frac{mv^2}{2kT}, \end{aligned} \quad (4a)$$

Index n=Elektronen (m_n , l_{on} , f_{on} , s_n , ζ_n , n_o , μ_{on}), Index p=Löcher (m_p , l_{op} , f_{op} , s_p , ζ_p , p_o , μ_{op}).

Legt man den Energienullpunkt in die Mitte der verbotenen Zone $\frac{1}{2}(E_L + E_G)$, so wird $\zeta_n = \zeta - \Delta E/2$, $\zeta_p = -\zeta - \Delta E/2$ ($\Delta E = E_L - E_G$) und

$$\begin{aligned} S_{ik\pm} &= Z M_{ik\mp} + D M_{ik\pm} + \frac{1}{T} M_{i,k+2}, \\ Z &= \frac{kT}{e} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\zeta}{kT} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\zeta}{e} \right) - \frac{\zeta}{eT}, \\ D &= \frac{kT}{e} \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{\Delta E}{2kT} \right) \\ &= -\frac{\Delta E_0}{2eT} \quad (\text{für } \Delta E = \Delta E_0 - \alpha T). \end{aligned} \quad (4b)$$

Die Grundgln. (4) enthalten dann nur noch M_{ik} mit von den Parametern der Elektronen und Löchern unabhängigen Faktoren.

2. Thermoelektrische, galvanomagnetische und thermomagnetische Effekte²

Aus dem Gleichungssystem (4) lassen sich alle Koeffizienten der verschiedenen in isotropen Halbleitern auftretenden Effekte angeben.

Man unterscheidet üblicherweise:

a) Thermoelektrische Effekte

($i \neq 0$, $\text{grad } T \neq 0$, $\mathfrak{H} = 0$),

b) Galvanomagnetische und thermomagnetische Effekte ($\mathfrak{H} \neq 0$).

Hier betrachten wir nur die *transversalen* Effekte ($\mathfrak{H} \perp i$) und wählen speziell $\mathfrak{H} = (0, 0, H)$ und $i = (i_x, 0, 0)$. *Longitudinale* Effekte treten nicht auf, da sich die Theorie in der hier angegebenen Form nur auf isotrope Halbleiter erstreckt.

Nach Gans¹ unterscheidet man die magnetischen Effekte weiterhin in *isotherme* Effekte ($\partial T / \partial y = 0$) und *adiabatische* Effekte ($c_y = 0$).

a) Thermoelektrische Effekte

Aus (4) erhält man mit $\mathfrak{H} = 0$ für die vier wichtigsten thermoelektrischen Effekte die Koeffizienten ($M^0_{ik} = M_{ik}$ ($s=0$), $S^0_{ik} = S_{ik}$ ($s=0$)):

$$\left. \begin{aligned} \text{spez. Leitfähigkeit: } \sigma_0 &= \frac{i_x}{E_x} \Big|_{\frac{\partial T}{\partial x}=0} = M^0_{13+}, \\ \text{Thomsonscher Wärmestrom: } \mu_w &= \frac{c_x}{E_x} \Big|_{\frac{\partial T}{\partial x}=0} = -M^0_{15-}, \\ \text{Thomsonscher Potentialgradient: } \mu_p &= \frac{E_x}{\partial T / \partial x} \Big|_{i_x=0} = -\frac{S^0_{13-}}{M^0_{13+}} \\ &= -\left(Z + D \frac{M^0_{13-}}{M^0_{13+}} + \frac{1}{T} \frac{M^0_{15-}}{M^0_{13+}} \right), \\ \text{Wärmeleitfähigkeit: } \alpha &= -\frac{c_x}{\partial T / \partial x} \Big|_{i_x=0} \\ &= \alpha_L - \frac{S^0_{13-} - M^0_{15-}}{M^0_{13+}} + S^0_{15+} \\ &= \alpha_L + D \left(M^0_{15+} - \frac{M^0_{13-} M^0_{15-}}{M^0_{13+}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{T} \left(M^0_{17+} - \frac{(M^0_{15-})^2}{M^0_{13+}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Zu diesen direkt aus den Stromgleichungen ableitbaren Koeffizienten kommen als für die Praxis wichtig hinzu:

Thomson-Koeffizient: μ_E (Thomsonscher Energiekoeffizient) definiert durch:

Wärmeentwicklung in der Volumeneinheit eines Halbleiters pro sec

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{i^2}{\sigma_0} + \operatorname{div}(z \operatorname{grad} T) - \mu_E(i \operatorname{grad} T), \quad (6)$$

$$\mu_E = \frac{S^0_{13-}}{M^0_{13+}} - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{M^0_{15-}}{M^0_{13+}} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\mu_w}{\sigma_0} \right) - \mu_p. \quad (7)$$

Hiermit schließlich sind die Koeffizienten der an den Kontakten auftretenden thermoelektrischen Effekte verknüpft durch die *Thomsonschen Beziehungen*:

$$\mu_E = T \frac{\partial \varphi}{\partial T} = -T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H}{T} \right) = -\frac{\partial}{\partial T} (F_s + H), \quad (8)$$

wo $\varphi = \operatorname{abs. Thermokraft}$, $H = \operatorname{Peltier-Koeffizient}$, $F_s = \operatorname{Seebeck-Koeffizient}$.

b) Magnetische Effekte

Durch Umformung von (4) erhält man mit Hilfe der Determinanten

$$\begin{aligned} D_0 &= \begin{vmatrix} M_{13+} & -M_{22-} H \\ M_{22-} H & M_{13+} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} M_{22-} H & M_{13+} \\ -M_{15-} & M_{24+} H \end{vmatrix}, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} M_{22-} H & M_{13+} \\ M_{24+} H & M_{15-} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} -M_{22-} H & S_{13-} H \\ M_{13+} & S_{22+} H \end{vmatrix}, \\ D_4 &= \begin{vmatrix} M_{13+} & S_{13-} H \\ M_{22-} H & S_{22+} H \end{vmatrix}, \\ D_5 &= \begin{vmatrix} M_{13+} & -M_{22-} H & S_{13-} H \\ M_{22-} H & M_{13+} & S_{22+} H \\ -M_{15-} & M_{24+} H & -(S_{15+} + \kappa_1) \end{vmatrix}, \\ D_6 &= \begin{vmatrix} M_{13+} & -M_{22-} H & S_{13-} H \\ M_{22-} H & M_{13+} & S_{22+} H \\ M_{24+} H & M_{15-} & S_{24-} H \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

(isotherm, $\partial T / \partial y = 0$)

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{D_0} \left(M_{13+} i_x + D_3 \frac{\partial T}{\partial x} \right), \\ E_y &= \frac{1}{D_0} \left(-M_{22-} H i_x - D_4 \frac{\partial T}{\partial x} \right), \\ c_x &= \frac{1}{D_0} \left(-D_1 i_x + D_5 \frac{\partial T}{\partial x} \right), \\ c_y &= \frac{1}{D_0} \left(D_2 i_x - D_6 \frac{\partial T}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

(adiabatisch, $c_y = 0$)

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{D_0} \left\{ M_{13+} \left(1 - \frac{D_2 D_4}{M_{13+} D_5} \right) i_x \right. \\ &\quad \left. + D_3 \left(1 + \frac{D_4 D_6}{D_3 D_5} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right\}, \\ E_y &= \frac{1}{D_0} \left\{ -M_{22-} H \left(1 + \frac{D_2 D_3}{M_{22-} H D_5} \right) i_x \right. \\ &\quad \left. - D_4 \left(1 - \frac{D_3 D_6}{D_4 D_5} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right\}, \quad (11) \\ c_x &= \frac{1}{D_0} \left\{ -D_1 \left(1 + \frac{D_2 D_6}{D_1 D_5} \right) i_x \right. \\ &\quad \left. + D_5 \left(1 + \left(\frac{D_6}{D_5} \right)^2 \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right\}, \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= -\frac{1}{D_5} \left(D_2 i_x - D_6 \frac{\partial T}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Setzt man in die Determinanten $D_3 - D_6$ für die S_{ik} die Ausdrücke (4b) ein, so fallen außer in D_3 die Glieder mit Z (also mit $\partial / \partial T (\zeta/T)$) heraus. Von der Ableitung der Fermi-Kante nach der Temperatur sind also nur diejenigen Koeffizienten abhängig, die D_3 enthalten, alle anderen nur von ζ (also von n und p) selbst.

Aus (10) und (11) folgen nun direkt die gesuchten Koeffizienten in allgemeiner Form:

	isotherm	adiabatisch	(12)
<i>Spez. Leitfähigkeit im Magnetfeld</i>	$\sigma_{Hi} = \frac{D_0}{M_{13+}}$	$\sigma_{Ha} = \frac{D_0 D_5}{M_{13+} D_5 - D_2 D_4}$	
<i>Th. Wärmestrom im Magnetfeld</i>	$\mu_{WHi} = -\frac{D_1}{M_{13+}}$	$\mu_{WHa} = -\frac{D_1 D_5 + D_2 D_6}{M_{13+} D_5 - D_2 D_4}$	
<i>Th. Potentialgradient im Magnetfeld</i>	$\mu_{PHi} = \frac{D_3}{D_0}$	$\mu_{PHA} = \frac{D_3}{D_0} \left(1 + \frac{D_4 D_6}{D_3 D_5}\right)$	
<i>Wärmeleitfähigkeit im Magnetfeld</i>	$\varkappa_{Hi} = -\frac{D_5}{D_0}$	$\varkappa_{Ha} = -\frac{D_5}{D_0} \left(1 + \left(\frac{D_6}{D_5}\right)^2\right)$	
<i>Hall-Koeffizient</i> $R = \frac{E_y}{i_x H}$	$R_i = -\frac{M_{22-}}{D_0}$	$R_a = -\frac{M_{22-}}{D_0} \left(1 + \frac{D_2 D_3}{M_{22-} H D_5}\right)$	
<i>Nernst-Koeffizient</i> $Q = \frac{E_y}{H \cdot \partial T / \partial x}$	$Q_i = -\frac{D_4}{D_0 H}$	$Q_a = -\frac{D_4}{D_0 H} \left(1 - \frac{D_3 D_6}{D_4 D_5}\right)$	
<i>Ettingshausen-Koeffizient</i> $P = \frac{\partial T / \partial y}{i_x H}$	$P_i = 0$	$P_a = P = -\frac{D_2}{D_5 H}$	
<i>Righi-Leduc-Koeffizient</i> $S = \frac{\partial T / \partial y}{H \cdot \partial T / \partial x}$	$S_i = 0$	$S_a = S = \frac{D_6}{D_5 H}$	

Die adiabatischen Koeffizienten lassen sich auch als Kombinationen der isothermen Koeffizienten ausdrücken, wenn man noch die beiden zusätzlich möglichen Größen

$$c_y/i_x \Big|_{\frac{\partial T}{\partial x}=0} = D_2/D_0 \text{ und } c_y/\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i_x=0} = -D_6/D_0$$

einführt. Verzichtet man dagegen auf diese beiden weiteren Koeffizienten und nimmt statt dessen P und S , so lassen sich die restlichen adiabatischen Koeffizienten ausdrücken durch⁵:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_{Ha}} &= \frac{1}{\sigma_{Hi}} - PQ_i H^2, \quad \frac{\mu_{WHa}}{\sigma_{Ha}} = \frac{\mu_{WHi}}{\sigma_{Hi}} - PS \varkappa_{Hi} H^2, \\ \varkappa_{Ha} &= \varkappa_{Hi} (1 + S^2 H^2), \quad \mu_{PHA} = \mu_{PHi} - SQ_i H^2, \\ R_a &= R_i + \mu_{PHi} P, \quad Q_a = Q_i + \mu_{PHi} S. \end{aligned} \quad (14)$$

3. Spezialisierung der Grundgleichungen auf praktisch auftretende Problemstellungen

Die Grundgl. (4) sind in allgemeiner Form nur mit großem Rechenaufwand explizit darstellbar. Die Integrale in den M_{ik} bzw. S_{ik} vereinfachen sich aber in folgenden in der Praxis meist realisierten Fällen:

⁵ Ein Teil dieser Beziehungen wurde schon von H. C. Callen (Phys. Rev. **85**, 16 [1952]) angegeben. Die dort abgeleiteten Beziehungen gelten jedoch zunächst nur für Metalle bzw. Halbleiter mit nur einer

a) Annahmen über die Energieabhängigkeit der freien Weglänge

Die freie Weglänge wird in Halbleitern im wesentlichen durch zwei Streuprozesse begrenzt, durch die Streuung am Gitter (thermische Streuung) und die Streuung an Störstellen. Im Falle der thermischen Streuung ist die freie Weglänge unabhängig von der Energie der gestreuten Teilchen, also $l=l_0$. Bei Streuung an neutralen Störstellen ist l proportional der Wurzel aus der Energie⁶, bei Streuung an ionisierten Störstellen angenehert proportional dem Quadrat der Energie⁷.

Speziell für Streuung an ionisierten Störstellen gilt⁷:

$$l = \alpha \varepsilon^2, \quad \alpha = \frac{2 \varkappa^2}{N_i \pi e^4 \ln \{1 + (\varkappa \varepsilon / N_i^{1/3} e^2)^2\}}. \quad (15)$$

(\varkappa =Dielektrizitätskonstante, N_i =Dichte der ion. Störstellen)

Die logarithmische Abhängigkeit des Faktors α von der Energie wird meist unterdrückt. Dazu wird nach Einsetzen von (15) in die M_{ik} für das dann im Nenner des Integranden logarithmisch auftretende ε der Wert eingesetzt, der demjenigen ε entspricht, für das der restliche Integrand sein Maximum besitzt, d. h. der Logarithmus wird als langsam ver-

Art von Ladungsträgern und lassen sich nicht a priori auf gemischte Halbleiter übertragen.

⁶ C. Erginsoy, Phys. Rev. **79**, 1013 [1950].

⁷ E. Conwell u. V. F. Weißkopf, Phys. Rev. **77**, 388 [1950].

änderliche Funktion im Gegensatz zum restlichen Integranden angenommen⁷. Für M_{13} (spez. Leitfähigkeit) ergibt dies bei nichtentarteten Halbleitern $\varepsilon = 3kT$. Man begeht aber meist keinen allzu großen Fehler, wenn man diesen Wert immer annimmt, also für l eine exakt quadratische Energieabhängigkeit ansetzt:

$$l = \alpha \varepsilon^2, \quad \alpha = \frac{2\pi^2}{N_1 \pi e^4 \ln \{1 + (3\pi kT/N_1^{1/3} \varepsilon^2)^2\}}. \quad (16)$$

Für gleichzeitige thermische Streuung und Streuung an ionisierten Störstellen schließlich erhält man als freie Weglänge, da sich die beiden Weglängen l_0 und $\alpha \varepsilon^2$ reziprok addieren:

$$l = l_0 \frac{\varepsilon^2}{x^2 + \beta} \quad \left(x = \frac{\varepsilon}{kT}, \quad \beta = \frac{l_0}{\alpha (kT)^2} \right). \quad (17)$$

Setzt man schließlich noch in (4a) $s^2 = \gamma g^2/x$, $\gamma = \frac{9}{16}\pi(\mu_0 H)^2$, so erhält man

mit $\gamma_\alpha = \frac{9}{16}\pi(\mu_\alpha H)^2$ und $\mu_\alpha = \frac{4e\alpha}{3\sqrt{2}\pi m kT}$:

thermische Streuung:

$$M_{ik}(\gamma) = -e n_0 \mu_0^i \left\{ \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{i-1} \left(\frac{kT}{e} \right)^{\frac{k+i}{2}-2} \right\} \\ \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{m} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^{\frac{k-1}{2}}}{1 + \gamma/x} \frac{\partial f_0}{\partial x} dx,$$

Ionenstreuung:

$$M_{ik}(\gamma_\alpha) = -e n_0 \mu_\alpha^i \left\{ \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{i-1} \left(\frac{kT}{e} \right)^{\frac{k+i}{2}-2} \right\} \\ \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{m} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^{\frac{k-1}{2}+2i}}{1 + \gamma_\alpha (kT)^4 x^3} \frac{\partial f_0}{\partial x} dx, \quad (18)$$

gleichzeitige th. und Ion. Streuung:

$$M_{ik}(\gamma) = -e n_0 \mu_0^i \left\{ \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{i-1} \left(\frac{kT}{e} \right)^{\frac{k+i}{2}-2} \right\} \\ \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{m} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^{\frac{k-1}{2}+2i}}{(x^2 + \beta)^2 + \gamma x^3} \frac{\partial f_0}{\partial x} dx.$$

b) *Beschränkung auf kleine Magnetfelder*

Beschränkt man sich auf kleine Magnetfelder, so läßt sich der Faktor $1/(1+s^2)$ in den M_{ik} der Gl. (4a) entwickeln und man erhält:

$$M_{ik}(\gamma) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j H^{2j} M_{i+2j, k-2j}^0 \\ = M_{ik}^0 - M_{i+2, k-2}^0 H^2 + \dots \quad (19)$$

mit:

thermische Streuung:

$$M_{ik}^0 = -e n_0 \mu_0^i \left\{ \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{i-1} \left(\frac{kT}{e} \right)^{\frac{k+i}{2}-2} \right\} \\ \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{m} \right)^3 \int_0^\infty x^{\frac{k-1}{2}} \frac{\partial f_0}{\partial x} dx,$$

Ionenstreuung:

$$M_{ik}^0 = -e n_0 \mu_\alpha^i \left\{ \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{i-1} \left(\frac{kT}{e} \right)^{\frac{k+i}{2}-2} \right\} \\ \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{m} \right)^3 \int_0^\infty x^{\frac{k-1}{2}+2i} \frac{\partial f_0}{\partial x} dx, \quad (20)$$

gleichzeitige th. und Ion. Streuung:

$$M_{ik}^0 = -e n_0 \mu_0^i \left\{ \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{i-1} \left(\frac{kT}{e} \right)^{\frac{k+i}{2}-2} \right\} \\ \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{m} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^{\frac{k-1}{2}+2i}}{(x^2 + \beta)^i} \frac{\partial f_0}{\partial x} dx.$$

Die ersten beiden Integrale in (20) lassen sich zurückführen auf die bekannten *Fermi-Integrale*:

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{h}{m} \right)^3 \int_0^\infty x^\alpha \frac{\partial f_0}{\partial x} dx \\ = \alpha \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1 - e^{-\zeta/kT}} dx = \alpha F_{\alpha-1} \left(\frac{\zeta}{kT} \right). \quad (21)$$

Die Werte für die verschiedenen hier auftretenden Fermi-Integrale sind für $-4 < \zeta/kT < +4$ in Tab. 1 aufgetragen. Für $\zeta/kT < -4$ sind die Fermi-Integrale durch

$$F_\alpha \left(\frac{\zeta}{kT} \right) = II(\alpha) e^{\zeta/kT} \quad (22)$$

gegeben (Nichtentartete Halbleiter). Für $\zeta/kT > +4$ ist die Entartung des Halbleiters bereits so stark, daß seine Halbleitereigenschaften weitgehend verlorengegangen sind.

In Abb. 1 ist ferner der Verlauf der hier auftretenden Integrale vom Typus der dritten Gleichung (20) aufgetragen. Dabei beschränken wir uns allerdings auf den nichtentarteten Halbleiter ($\zeta/kT < -4$, $f_0 \approx 2(m/h)^3 e^{(\zeta/kT)-x}$).

4. Explizite Darstellung der Grundgleichungen für kleine Magnetfelder

Wir behandeln im folgenden den Fall des Halbleiters bei kleinen Magnetfeldern genauer. Für die Berechnung der Quereffekte im transversalen Magnetfeld [Auftreten einer Spannung oder eines Tem-

peraturgradienten in der y -Richtung, Gl. (13)] genügt es, in erster Näherung die in H linearen Glieder zu betrachten. Für die Längseffekte [Änderung der thermoelektrischen Effekte durch ein transversales Magnetfeld, Gl. (12)] müssen dagegen die in H quadratischen Glieder noch mitberücksichtigt werden. In diesem Fall lauten die Grundgln. (4) mit $\mathfrak{H} = (0, 0, H)$:

$$\begin{aligned} i_x &= M_{13+}^0 E_x - M_{22-}^0 H E_y - M_{31+}^0 H^2 E_x \\ &\quad + S_{13-}^0 \frac{\partial T}{\partial x} - S_{22+}^0 H \frac{\partial T}{\partial y} - S_{31-}^0 H^2 \frac{\partial T}{\partial x}, \\ i_y &= M_{13+}^0 E_y + M_{22-}^0 H E_x - M_{31+}^0 H^2 E_y \\ &\quad + S_{13-}^0 \frac{\partial T}{\partial y} + S_{22+}^0 H \frac{\partial T}{\partial x} - S_{31-}^0 H^2 \frac{\partial T}{\partial y}, \\ i_z &= M_{13+}^0 E_z + S_{13-}^0 \frac{\partial T}{\partial z}; \\ c_x &= -M_{15-}^0 E_x + M_{24+}^0 H E_y + M_{33-}^0 H^2 E_x \\ &\quad - (S_{15+}^0 + \varkappa_L) \frac{\partial T}{\partial x} + S_{24-}^0 H \frac{\partial T}{\partial y} - S_{33+}^0 H^2 \frac{\partial T}{\partial x}, \\ c_y &= -M_{15-}^0 E_y - M_{24+}^0 H E_x + M_{33-}^0 H^2 E_y \\ &\quad - (S_{15+}^0 + \varkappa_L) \frac{\partial T}{\partial y} - S_{24-}^0 H \frac{\partial T}{\partial x} + S_{33+}^0 H^2 \frac{\partial T}{\partial y}, \\ c_z &= -M_{15-}^0 E_z - (S_{15+}^0 + \varkappa_L) \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \quad (23)$$

Die hier in Betracht kommenden Werte der M_{ik}^0 sind in Tab. 2 aufgeführt.

Mit Hilfe von (12), (13) und (23) lassen sich jetzt die verschiedenen Koeffizienten explizit angeben:

$$\begin{aligned} \sigma_{Hi} &= \sigma_0 - \left\{ M_{31+}^0 - \frac{(M_{22-}^0)^2}{M_{13+}^0} \right\} H^2, \\ \mu_{WHi} &= \mu_W + \left\{ M_{33-}^0 - \frac{M_{22-}^0 M_{24+}^0}{M_{13+}^0} \right\} H^2, \\ \mu_{PHi} &= \mu_P + \left\{ S_{13-}^0 M_{31+}^0 - M_{13+}^0 S_{31-}^0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_{22-}^0}{M_{13+}^0} (S_{13-}^0 M_{22-}^0 - M_{13+}^0 S_{22+}^0) \right\} H^2, \\ \varkappa_{Hi} &= \varkappa - \left\{ \frac{1}{M_{13+}^0} (S_{33+}^0 M_{13+}^0 - S_{13-}^0 M_{33-}^0) \right. \\ &\quad + \frac{M_{15-}^0}{M_{13+}^0} [S_{13-}^0 M_{31+}^0 - M_{13+}^0 S_{31-}^0] \\ &\quad - \frac{M_{22-}^0}{M_{13+}^0} (S_{13-}^0 M_{22-}^0 - M_{13+}^0 S_{22+}^0) \\ &\quad \left. + \frac{M_{24+}^0}{(M_{13+}^0)^2} (S_{13-}^0 M_{22-}^0 - M_{13+}^0 S_{22+}^0) \right\} H^2, \\ R_i &= -\frac{M_{22-}^0}{(M_{13+}^0)^2}, \\ Q_i &= \frac{1}{(M_{13+}^0)^2} (M_{22-}^0 S_{13-}^0 - M_{13+}^0 S_{22+}^0), \\ P &= \frac{M_{24+}^0 M_{13+}^0 - M_{15-}^0 M_{22-}^0}{M_{13+}^0 (M_{15-}^0 S_{13-}^0 - M_{13+}^0 (S_{15+}^0 + \varkappa_L))}, \\ S &= \frac{M_{13+}^0 (M_{13+}^0 S_{24-}^0 - M_{24+}^0 S_{13-}^0)}{M_{13+}^0 (M_{15-}^0 S_{13-}^0 - M_{13+}^0 (S_{15+}^0 + \varkappa_L))} \\ &\quad + \frac{M_{15-}^0 (M_{22-}^0 S_{13-}^0 - M_{13+}^0 S_{22+}^0)}{M_{13+}^0 (M_{15-}^0 S_{13-}^0 - M_{13+}^0 (S_{15+}^0 + \varkappa_L))}. \end{aligned} \quad (24)$$

$$(25)$$

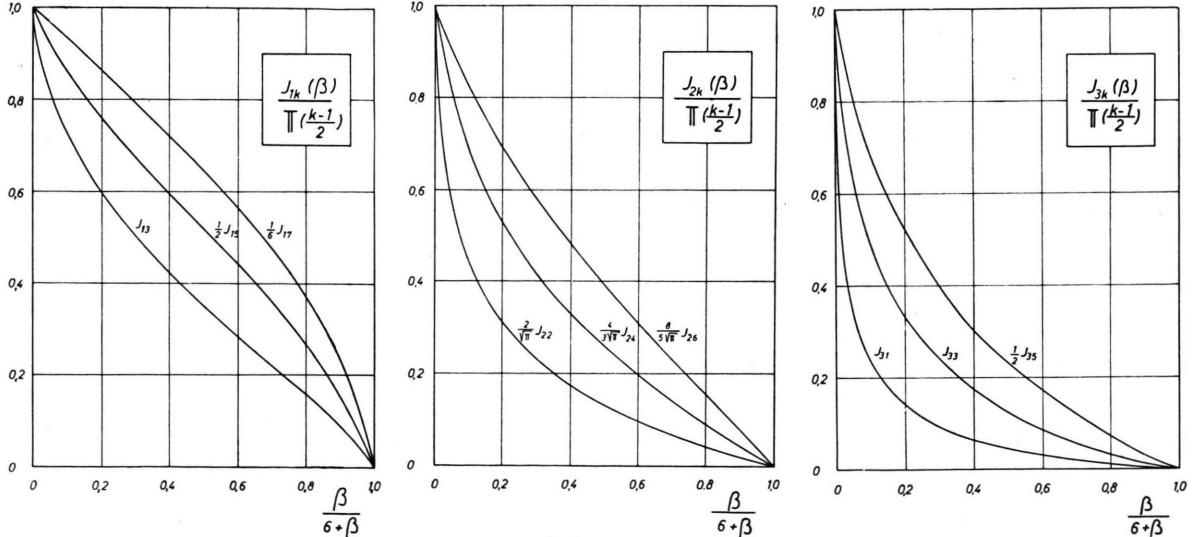


Abb. 1a bis 1c. Verlauf der in Gl. (20) auftretenden Integrale

$$J_{ik}(\beta) = \int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{(x^2 + \beta)^i} e^{-x} dx \quad (\text{vgl. auch Tab. 2});$$

J_{13}, J_{22} nach V. A. Johnson und K. Lark-Horowitz, Phys. Rev. **89**, 941 [1952]. Als Abszisse ist $\beta/(6 + \beta) = \mu_{\text{th}}/(\mu_{\text{th}} + \mu_{\text{ion}})$ aufgetragen.

$\frac{\zeta}{kT}$	$\frac{1}{1+e^{-\zeta/kT}}$	$F_{-1/2}$	$\ln(1+e^{\zeta/kT})$	$F_{1/2}$	F_1	$F_{3/2}$	F_2	F_3	$F_{5/2}$	F_4	$F_{9/2}$	F_5	$F_{11/2}$	F_6	F_7
-4	0,01799	0,03204	0,01815	0,01613	0,01823	0,02427	0,03656	0,10977	0,21287	0,4390	0,95830	2,198	5,275	13,195	92,3
-3	0,04743	0,08526	0,04859	0,04339	0,04918	0,06561	0,09896	0,29780	0,57782	1,194	2,60314	5,948	14,33	35,82	250,9
-2	0,11920	0,21918	0,12693	0,11459	0,13102	0,17580	0,26626	0,80532	1,56496	3,234	7,06295	16,210	38,91	97,25	681,8
-1	0,26894	0,52114	0,31326	0,29050	0,33834	0,46085	0,70510	2,15984	4,21327	8,721	19,105	43,83	105,6	264,1	1852
0	0,50000	1,07216	0,69315	0,67809	0,8225	1,15280	1,803	5,68220	11,184	23,340	51,290	118,3	284,8	714,8	5020
+1	0,73106	1,82041	1,3137	1,39638	1,8067	2,66168	4,312	14,39	28,83	60,981	135,4	315,1	762,8	1922,3	13597
+2	0,88079	2,59540	2,1270	2,50246	3,5140	5,53253	9,445	34,30	70,76	153,24	346,6	817,4	1975,5	5091,3	36422
+3	0,95257	3,28522	3,0486	3,97699	6,0958	10,3537	18,87	75,73	162,6	363,69	846,2	2040,4	5023,7	13148,2	96007
+4	0,98201	3,87434	4,01816	5,77073	9,6268	17,6277	34,49	154,3	346,7	814,64	1947	4873,8	12493	32618,6	24514

Tab. 1. Werte der für kleine Magnetfelder in Gl. (20) und Tab. 2 auftretenden Fermi-Integrale für $-4 < \zeta/kT < +4$ (vgl. auch Tab. 2).

$F_{-1/2}, F_{1/2}, F_{3/2}$ nach J. Mc Dougall u. E. C. Stoner, Trans. Roy. Soc. A **237**, 67 [1936]. $F_2, F_3, F_{7/2}, F_{9/2}$ nach V. A. Johnson u. F. M. Shapley, Phys. Rev. **90**, 523 [1953]. (In diesen beiden Arbeiten sind die Fermi-Integrale bis $\zeta/kT = +20$ angegeben.) Für die Auswertung der restlichen Integrale sowie der in Abb. 1 enthaltenen Funktionen bin ich der Rechengruppe der Siemens-Schuckert-Werke, besonders Herrn H. Hoffmann, zu Dank verpflichtet.

	Entartung ($n = n_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\zeta/kT)$)			Keine Entartung ($n = n_0 e^{\zeta/kT}$)		
	thermische Str. $\cdot n_0 \mu_{\text{th}}^i$	Ionenstreuung $\cdot n_0 \mu_{\text{ion}}^i$	gemischte Str. $\cdot n_0 \mu_{\text{th}}^i$	thermische Str. $\cdot n_0 \mu_{\text{th}}^i$	Ionenstreuung $\cdot n_0 \mu_{\text{ion}}^i$	gemischte Str. $\cdot n_0 \mu_{\text{th}}^i$
M_{13}^0	$\ln(1+e^{\zeta/kT})$	$\frac{1}{2} F_2$	K_{13}	1	1	J_{13}
M_{15}^0	$2(kT/e) F_1$	$\frac{2}{3}(kT/e) F_3$	$(kT/e) K_{15}$	$2(kT/e)$	$4(kT/e)$	$(kT/e) J_{15}$
M_{17}^0	$3(kT/e)^2 F_2$	$\frac{5}{6}(kT/e)^2 F_4$	$(kT/e)^2 K_{17}$	$6(kT/e)^2$	$20(kT/e)^2$	$(kT/e)^2 J_{17}$
M_{22}^0	$\frac{3}{8}\sqrt{\pi} F_{-1/2}$	$\frac{3}{32}\sqrt{\pi} F_{7/2}$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi} K_{22}$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{315}{512}\pi$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi} J_{22}$
M_{24}^0	$\frac{9}{8}\sqrt{\pi}(kT/e) F_{1/2}$	$\frac{11}{96}\sqrt{\pi}(kT/e) F_{9/2}$	$\frac{4}{3}\sqrt{\pi}(kT/e) K_{24}$	$\frac{9}{16}\pi(kT/e)$	$\frac{3465}{1024}\pi(kT/e)$	$\frac{3}{4}\pi(kT/e) J_{24}$
M_{26}^0	$\frac{15}{8}\sqrt{\pi}(kT/e)^2 F_{3/2}$	$\frac{13}{96}\sqrt{\pi}(kT/e)^2 F_{11/2}$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}(kT/e)^2 K_{26}$	$\frac{45}{32}\pi(kT/e)^2$	$\frac{45045}{2048}\pi(kT/e)^2$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}(kT/e)^2 J_{26}$
M_{31}^0	$\frac{9}{16}\pi(1+e^{-\zeta/kT})^{-1}$	$\frac{9}{16}\pi\frac{1}{36}F_5$	$\frac{9}{16}\pi K_{31}$	$\frac{9}{16}\pi$	$\frac{15}{8}\pi$	$\frac{9}{16}\pi J_{31}$
M_{33}^0	$\frac{9}{16}\pi(kT/e)\ln(1+e^{\zeta/kT})$	$\frac{9}{16}\pi\frac{7}{216}(kT/e)F_6$	$\frac{9}{16}\pi(kT/e)K_{33}$	$\frac{9}{16}\pi(kT/e)$	$\frac{105}{8}\pi(kT/e)$	$\frac{9}{16}\pi(kT/e)J_{33}$
M_{35}^0	$\frac{9}{8}\pi(kT/e)^2 F_1$	$\frac{9}{16}\pi\frac{8}{216}(kT/e)^2 F_7$	$\frac{9}{16}\pi(kT/e)^2 K_{35}$	$\frac{9}{8}\pi(kT/e)^2$	$105\pi(kT/e)^2$	$\frac{9}{16}\pi(kT/e)^2 J_{35}$

Tab. 2. Werte für die M_{ik}^0 der Gln. (23) — (25).

$$\begin{aligned} \mu_{\text{th}} &= \frac{4e l_0}{3\sqrt{2\pi m kT}} = \mu_6; \\ \mu_{\text{ion}} &= \frac{8e \alpha (kT)^2}{\sqrt{2\pi m kT}} = 6\mu_\alpha (kT)^2; \\ f_0 &= 2 \left(\frac{m}{h} \right)^3 (1 + e^{x - \zeta/kT})^{-1}; \\ n_0 &= 2 \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2}; \\ \beta &= 6 \frac{\mu_{\text{th}}}{\mu_{\text{ion}}}; \\ F_\alpha \left(\frac{\zeta}{kT} \right) &= \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1 + e^{x - \zeta/kT}} dx \text{ (Tab. 1)}; \\ K_{ik}(\beta, \zeta/kT) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{h}{m} \right)^3 \cdot \int_0^\infty \frac{x^2 + 2i}{(x^2 + \beta)^i} \frac{\partial}{\partial x} f_0(x, \zeta/kT) dx; \\ J_{ik}(\beta) &= \int_0^\infty \frac{x^2 + 2i}{(x^2 + \beta)^i} e^{-x} dx \text{ (Abb. 1).} \end{aligned}$$

Hierzu kommen die thermoelektrischen Koeffizienten (5), (7) und (8) und die restlichen adiabatischen Koeffizienten (14).

Die Gln. (5), (7), (8), (14), (24) und (25) gestatten mit Hilfe der Tab. 2 die explizite Darstellung aller in der Leitfähigkeitstheorie der isotropen Halbleiter auftretenden Koeffizienten für entartete und nichtentartete Halbleiter bei Streuung am Gitter und (oder) Streuung an ionisierten Störstellen. Auf die Modifikationen der M_{ik} bei Streuung an neutralen Störstellen oder bei einer anderen von (17) abweichenden Energieabhängigkeit der freien Weglänge sei hier nicht eingegangen⁸.

Mit Hilfe der verschiedenen Koeffizienten können nun natürlich auch die M_{ik} und S_{ik} berechnet werden und die elektrische und thermische Stromdichten [Gl. (4) bzw. (23)] in Abhängigkeit von den äußeren Feldern und experimentell bestimmmbaren Größen angegeben werden.

Durch Einsetzen von (4b) in die S^0_{ik} in (24) und (25) findet man, daß nur μ_P von Z (also von $\partial\zeta/\partial T$) abhängt. Für die numerische Auswertung genügt also nach den obigen Ausführungen neben der Kenntnis des Streumechanismus die Kenntnis der Elektronen- und Löcherdichten. Lediglich für

μ_P und somit R_a , Q_a und $\mu_E(\varphi, \Pi, F_s)$ muß zusätzlich die Änderung der Dichten mit der Temperatur bekannt sein. Auf die in diesem Falle zweckmäßigen Umformungen sei hier aber nicht eingegangen^{9,10}.

Der Vergleich der klassischen Halbleitertheorie mit dem Experiment zeigt (zumindest bei den wesentlich homöopolaren Halbleitern) die weitgehende Richtigkeit der der Theorie zugrunde liegenden Annahmen. Abweichende experimentelle Ergebnisse können ihren Ursprung in von der Theorie nicht erfaßten Ursachen (Anisotropie, endliche Lebensdauer der Ladungsträger) haben, können jedoch auch zu einer Revision der der Theorie zugrunde liegenden Annahmen führen. So scheint z. B. die in der letzten Zeit sichergestellte Abweichung der Beweglichkeit in Ge¹¹, InSb¹² und der PbS-Gruppe¹³ vom theoretisch geforderten $T^{-3/2}$ -Gesetz nicht im Rahmen der klassischen Theorie erklärbar sein. Weitere Prüfungsmöglichkeiten kann z. B. die Untersuchung der verschiedenen magnetischen Effekte in den A^{III}B^V-Verbindungen wie InSb ergeben, da dort wegen der hohen Elektronenbeweglichkeit der Nernst-, Ettingshausen- und Righi-Leduc-Effekt besonders stark auftreten muß.

⁸ Eine genauere Diskussion des Einflusses verschiedenartig angenommener freier Weglängen wurde für Störstellenleiter von R. W. Wright (Proc. Phys. Soc., Lond. **64**, 984 [1951]) durchgeführt.

⁹ V. A. Johnson u. F. M. Shipley, Phys. Rev. **90**, 523 [1953] (Adiab. Hall-Effekt).

¹⁰ V. A. Johnson u. K. Lark-Horowitz, Phys.

Rev. **92**, 227 [1953], (Thomson-Koeffizient, Thermokraft).

¹¹ F. J. Morin, Phys. Rev. **93**, 62 [1954] u. a.

¹² O. Madelung u. H. Weiß, Z. Naturforschg. **9a**, 527 [1954].

¹³ E. H. Putley, Proc. Phys. Soc., Lond. (B), **65**, 388, 993 [1952].